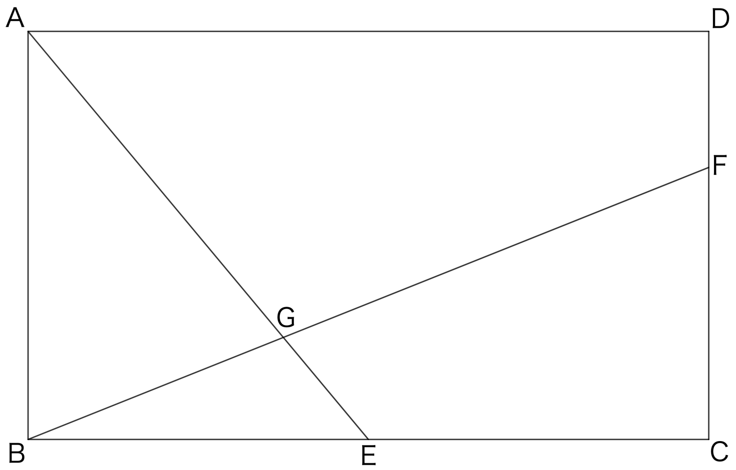
問 1

図のように $AB = 6\mathrm{cm}$、$AD = 10\mathrm{cm}$ の長方形 $ABCD$ がある。E は辺 BC の中点、F は辺 DC を 1 : 2 に分ける点である。また、G は線分 AE と BF の交点である。このとき、線分 AG の長さは何 cm か、求めなさい。



解答欄

cm

解答

$\frac{3}{4}\sqrt{61}$

解説

　ご想像の通り、AG を直接求めることはできないので、何段階かに分けて求めていくことになります。
流れとしては、まずは AE の長さを求め、さらに $AG:GE$ が何対何であるかを求めることで AG と GE の長さがわかります。

まず、図 1 の三角形に注目します。
点 E は $BC(=10\text{cm})$ の中点なので、BE は 5cm です。そして問題文より AB は 6cm です。したがって、三平方の定理より、$AE=\sqrt{6^2+5^2}=\sqrt{61}\text{cm}$ とわかります。

AE の長さがわかったら、次は $AG:GE$ を求めます。そのために、点 E から垂直に、図 2 のような補助線を引きます。こうすると、平行線の錯角である $\angle BAG=\angle HEG$、$\angle ABG=\angle EHG$ であり、「2 組の角がそれぞれ等しい」ことから $\triangle BAG\sim\triangle HEG$ であることがわかります。

さらに、図 3 のように $\triangle BCF$ に注目すると、中点連結定理より HE の長さが 2cm であるとわかります。

$\triangle BAG$ と $\triangle HEG$ が相似の関係にあり、$AB:EH=6:2=3:1$ であることから、相似比は $3:1$ です。よって対応する辺である $AG:EG=3:1$。
求めたい AG の長さは、$AE(=\sqrt{61}\text{cm})$ を $3:1$ に分けた 3 の方なので、$AG=\frac{3}{4}\sqrt{61}$。

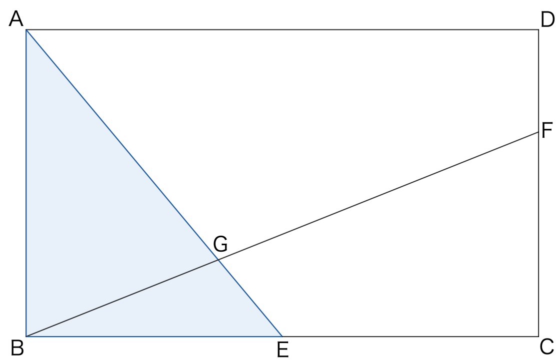


図 1

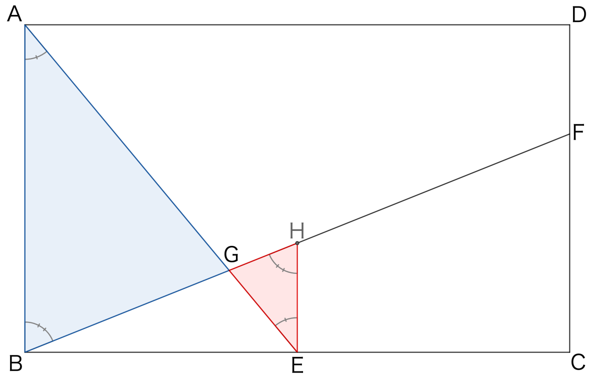


図 2

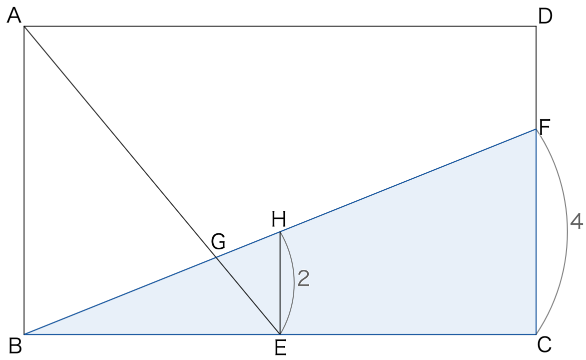
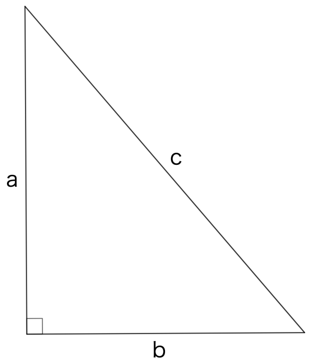


図 3

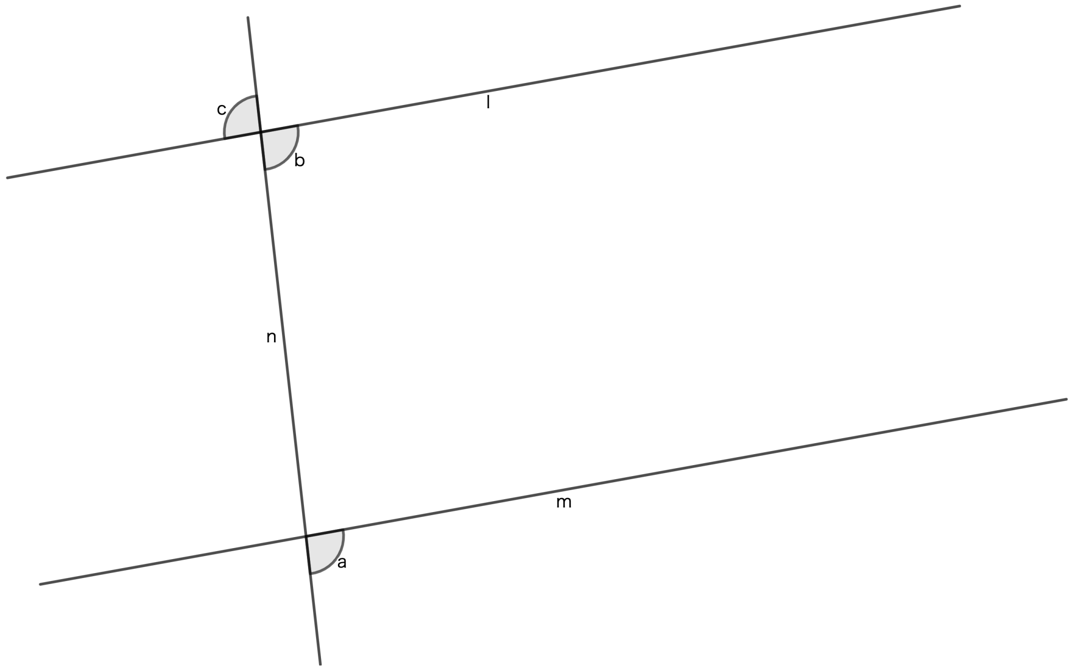
三平方の定理

図のような直角三角形に対して、$a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つ。これは、直角三角形であれば必ず成り立つ。逆に、直角かどうかわからない三角形でも $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立っていれば直角三角形であるということができる。



平行線の性質

図のように、2 本の直線 l、m に他の 1 本の直線 n が交わっているとき、それぞれの交点に対して同じ位置にある角の組み合わせを同位角といいます。下の図で、a と b はどちらもそれぞれの交点の右下にあるので同位角です。
また、同位角の反対側にできる角のことを錯角といいます。下の図で、a と c は錯角の関係にあります。
2 本の直線 l、m が並行であるとき、錯角と同位角は等しいという性質があります。すなわち、$a=b$、$a=c$。



三角形の相似

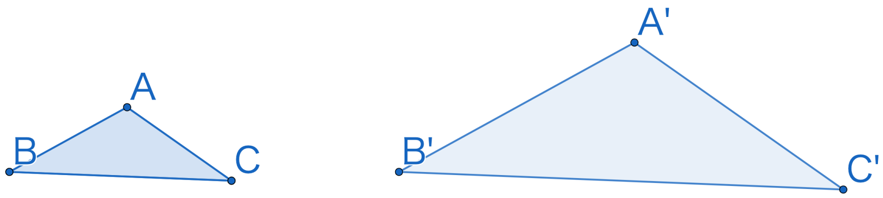
図形 A と図形 B が全く同じ形で大きさだけ違うとき、すなわち、拡大もしくは縮小した図形であるとき、A と B は**相似の関係である**といいます。
二つの三角形が相似であることをいうための条件は以下の三つ。

a 3 組の辺の比が全て等しい
b 2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい
c 2 組の角がそれぞれ等しい

また、相似な図形では、

a 対応する角は等しい
b 対応する辺の比は等しい

という性質があります。例えば下の図で、$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ が相似のとき、$AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A'$。

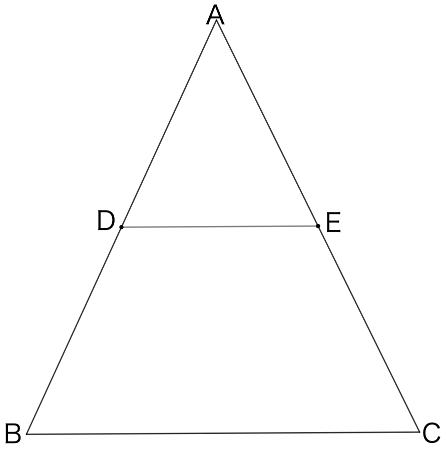


中点連結定理

点 D、E をそれぞれ $\triangle ABC$ の 2 辺 AB、AC の中点とするとき、

- $DE \parallel BC$
- $DE = \frac{1}{2}BC$

が成り立つ。
難しい表現をしていますが、要するに、「D と E が真ん中だったら DE は BC と平行で半分の長さだよ」ってことです。
$\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ が 2 : 1 の相似な三角形であることが理解できれば、この性質も理解できると思います。



比で分ける

ある数値を $a : b$ に分ける場合、$a + b$ で割ってから a および b をかけます。
例えば 20 を 2 : 3 に分ける場合、一旦 5 で割って 4 が 5 つ集まったものとして考えます。5 つある 4 を 2 つと 3 つに再分配することで 8(4 が 2 つ) と 12(4 が 3 つ) に分けることができます。
これは同じもの 2 つ分と 3 つ分なので、当然 2 : 3 になっています。