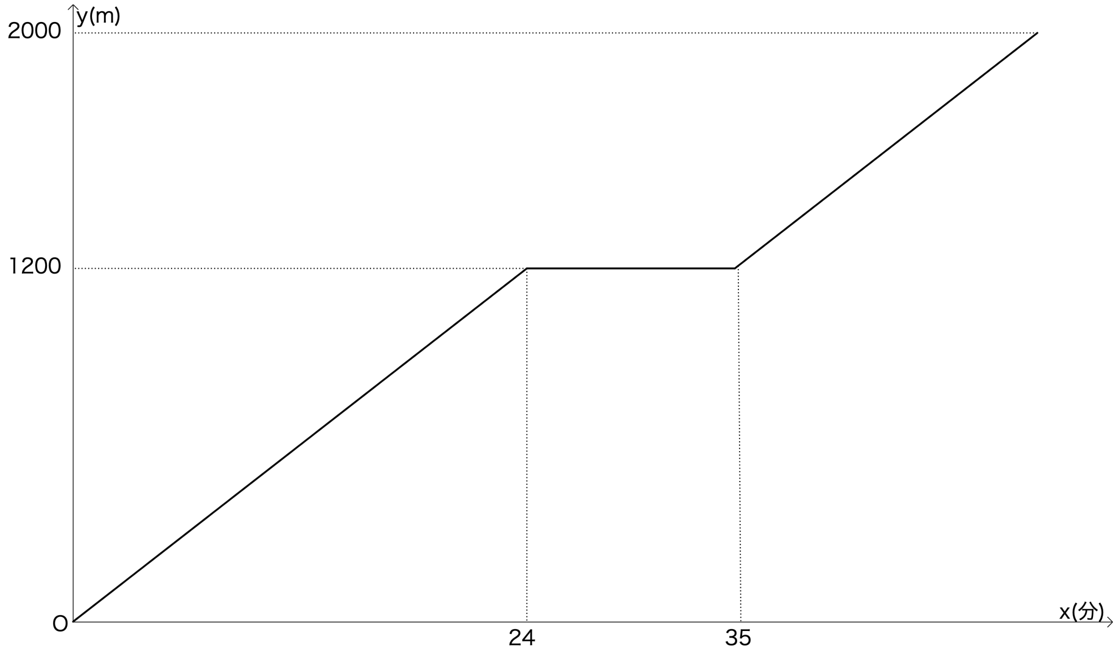
問 1

A 君の自宅から学校へ行く道の途中に公園がある。A 君は、10 時に自宅を出て公園まで一定の速さで歩き、少し寄り道をしたあと、自宅から公園まで歩いた速さと同じ速さで公園から学校まで歩いた。下の図は、A 君が自宅を出てから x 分間で歩いた道のりを ym として、学校に着くまでの時間と道のりの関係をグラフに表したものである。次の問いに答えなさい。



(1) A 君が自宅を出てから公園まで歩くときの、分速を求めなさい。
(2) A 君が自宅を出てから公園に着くまでの x と y の関係を式に表しなさい。
(3) 兄は A 君の忘れ物に気がつき、10 時 30 分に自宅を出て、自転車に乗って分速 150m で A 君を追いかけた。兄が A 君に追いつくのは、自宅から何 m の位置か、求めなさい。

解答欄

(1)		(2)		(3)	

解答

(1) 分速 50m

(2) $y = 50x$

(3) 1425m

解説

(1) 問題のグラフは、3 つの一次関数のグラフに分けて考える。A 君が自宅から公園まで歩いているときの様子を表しているのは、自宅を出た瞬間 ($x = 0$ 分) の瞬間から、立ち止まる直前 ($x = 24$ 分) までのグラフ (図 1 の A の部分) である。
この部分のグラフから、A 君は 24 分かけて 1200m 進んでいることがわかる (公園が自宅から 1200m 離れた場所にある)。また、分速とは *1* **分間にどれだけの距離を進めるか**ということである。24 分間で 1200m 進むということは、1 分間ではその $\frac{1}{24}$、つまり $\frac{1200}{24} = 50$m 進むはずなので分速 50m。

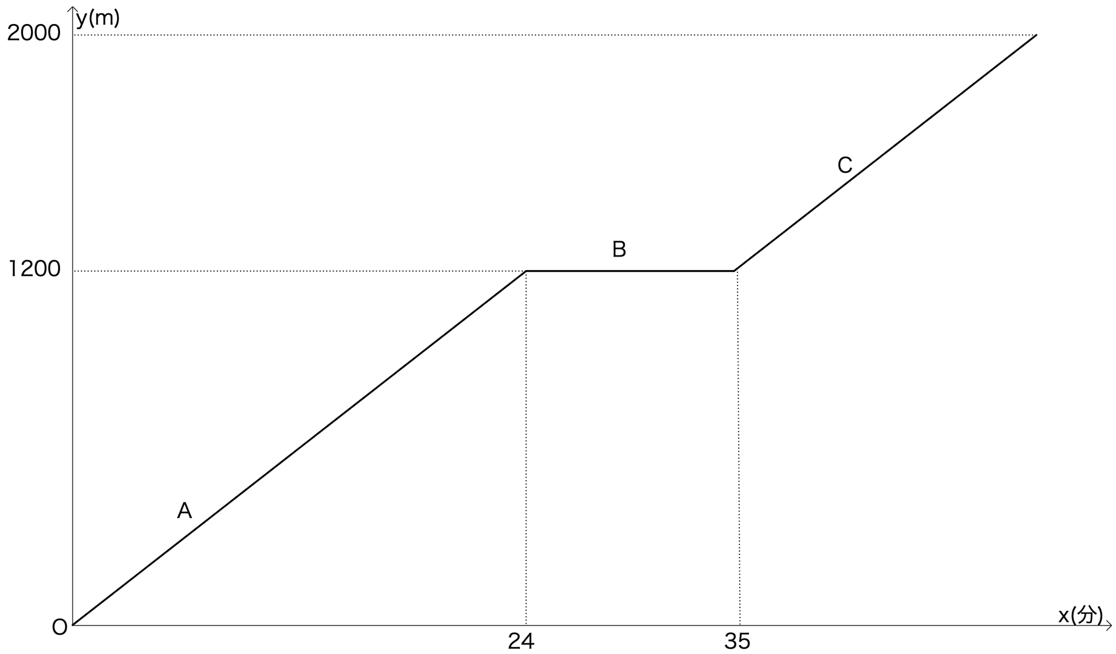


図 1

変化の割合

「x が *1* 増えたとき、y がいくつ増えるか」を変化の割合といい、$\frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}}$ で求められる。
一次関数 $y = ax + b$ においては、変化の割合は常に一定で、**傾き a がそのまま変化の割合と等しい**。
例えば、一次関数 $y = 3x + 2$ の変化の割合は常に (x の値にかかわらず)3 である。実際に、x が $1 \to 2$ まで増加したとき、y の値は $5 \to 8$ まで、3 増加しているので変化の割合は 3 であることがわかる。他の値についても確かめてみよう。

(2) A 君が自宅を出てから公園に着くまで、傾きは 50 であることが (1) でわかった。また、($0 \leqq x \leqq 24$) の範囲のグラフ (図 1 の A の部分) は原点を通るので切片は 0 である。

一次関数のグラフ

一次関数の式は $y = ax + b$ で表される。このとき、a を傾き、b を切片という。
a は名前の通りグラフの傾きを表しており、この値が大きいほどグラフは大きく傾き、0 であれば x 軸と平行になる。
b はグラフの y 軸方向のずれを表している。b が 0 のとき、グラフは原点を通る。それから b が大きくなればなるほどグラフ全体がそのまま y 軸方向 (上) にスライドし、原点を通らなくなる。$y = ax + b$ の式に $x = 0$ を代入するか、グラフの y 軸との交点がわかれば求められる (もともと原点を通っていた部分が、b の影響でそのまま y 軸方向にいくらか動いてきているため)。

(3) 追いついたときは、A 君と兄が同じ時刻に同じ位置にいたときなので、A 君のグラフと兄のグラフの交点を求めればいい (交点では、二つのグラフが x も y も等くなっている)。
兄は、分速 150m より傾きは 150。また 30 分後に自宅を出ていることから、$x = 30$ の瞬間はまだ自宅にいる ($y = 0$)。よって、$y = ax + b$ の式に $a = 150$、$x = 30$、$y = 0$ を代入すると、

$$\begin{aligned} 0 &= 150 \times 30 + b \\ 0 &= 4500 + b \\ b &= -4500 \end{aligned}$$

よって、兄の式は $y = 150x - 4500$。
ただ、A 君のグラフは図 1 のように三つの一次関数のグラフにわかれているため、どのグラフと交わるのか、見当をつける必要がある (そうしないと 3 つとも計算して求めるハメになる)。
そのために、まずは簡単でいいので兄のグラフを A 君のグラフに書き加えてみる (図 2)。

すると、交点の正確な値はわからないが、どうやら図 1 の C の部分と交わりそうだとわかる。
C の部分のグラフの式は、問題より $y = ax + b$ のうち a が 50(A の部分と傾きが同じ) であることがわかっている。また、グラフより $x = 35, y = 1200$ の点を通るので式に代入して、

$$\begin{aligned} 1200 &= 50 \times 35 + b \\ 1200 &= 1750 + b \\ b &= 1200 - 1750 \\ b &= -550 \end{aligned}$$

C の部分の一次関数は $y = 50x - 550$。よって、A 君の式と兄の式の連立方程式 $\begin{cases} y = 50x - 550 \\ y = 150x - 4500 \end{cases}$ を解けば交点 (兄と A 君が同じ時間、同じ位置にいたときの時間 x と位置 y) が求まる。x を消すために A 君の式を 3 倍して式同士の引き算を行う。

$$\begin{array}{rrcl} & 3y & = & 150x - 1650 \\ -) & y & = & 150x - 4500 \\ \hline & 2y & = & 2850 \end{array}$$

よって $y = 1425$。

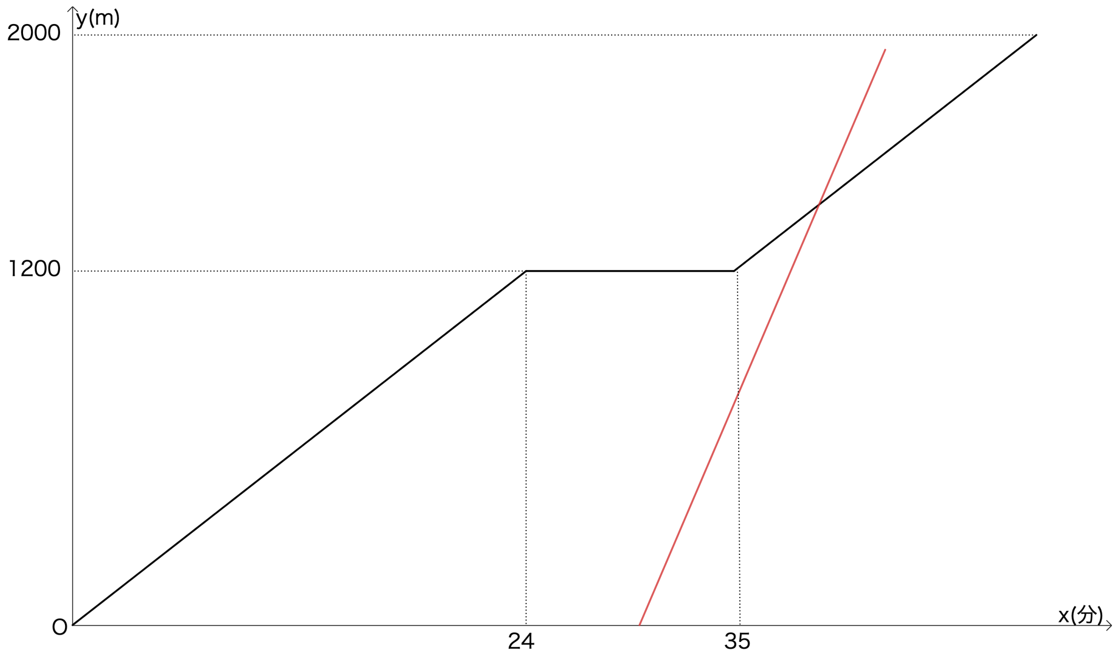


図 2

兄の式 $y = 150x - 4500$ に代入すると (交点なので、どちらの式に代入しても同じ y の値を示すはず)、

$$
\begin{aligned}
1425 &= 150x - 4500 \\
150x &= 5925 \\
x &= \frac{237}{6}
\end{aligned}
$$

よって $x = \frac{237}{6}$(問題にはないけど)。