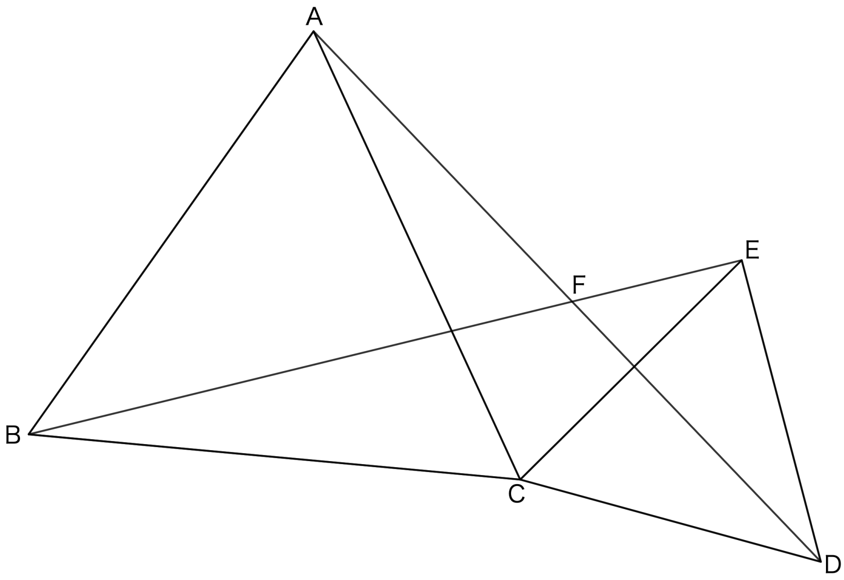
問 1

下の図で、$\triangle ABC$ と $\triangle ECD$ は正三角形である。このとき、次の問いに答えなさい。



(1) $\triangle ACD \equiv \triangle BCE$ を証明せよ。

(2) $\angle ABE = 41°$ 、$\angle CDA = 31°$ のとき、$\angle ACE$ と $\angle BFD$ を求めよ。

解答欄

(1)		
(2)	$\angle ACE =$	$\angle BFD =$

解答

(1) $\triangle ACD$ と $\triangle BCE$ で、

$\triangle ABC$ は正三角形なので $AC = BC$...①

$\triangle ECD$ は正三角形なので $CD = CE$... ②

$\angle ACD = \angle ACE + \angle ECD = \angle ACE + 60°$... ③

$\angle BCE = \angle BCA + \angle ACE = \angle ACE + 60°$... ④

③、④より、$\angle ACD = \angle BCE$ ...⑤

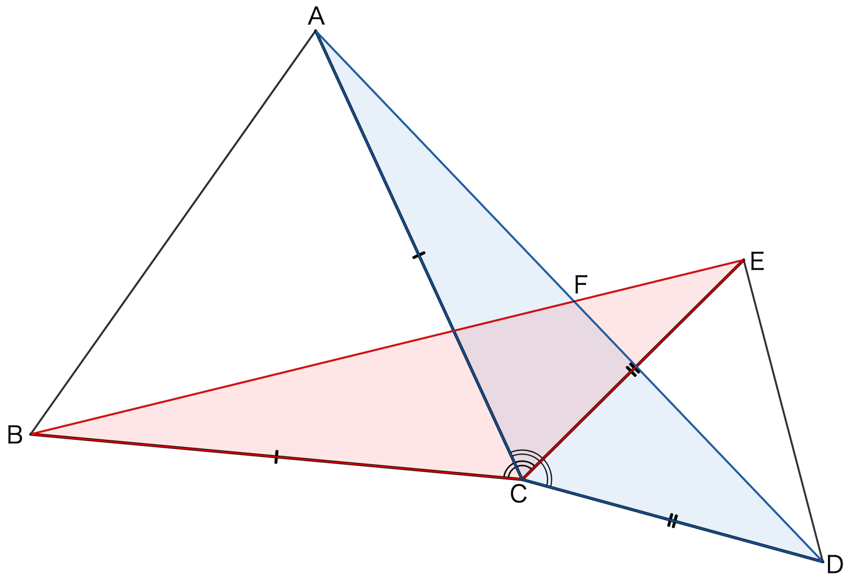
①、②、⑤より、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle ACD \equiv \triangle BCE$

(2) $\angle ACE = 70°, \angle BFD = 120°$

解説

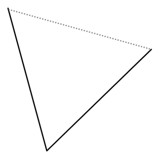
(1) まず、証明を考える前に証明する図形を自分なりにわかりやすくしておきましょう。
この図を見ると、正三角形 (辺の長さは全て同じ) の辺と一致しているため、二組の辺が等しい



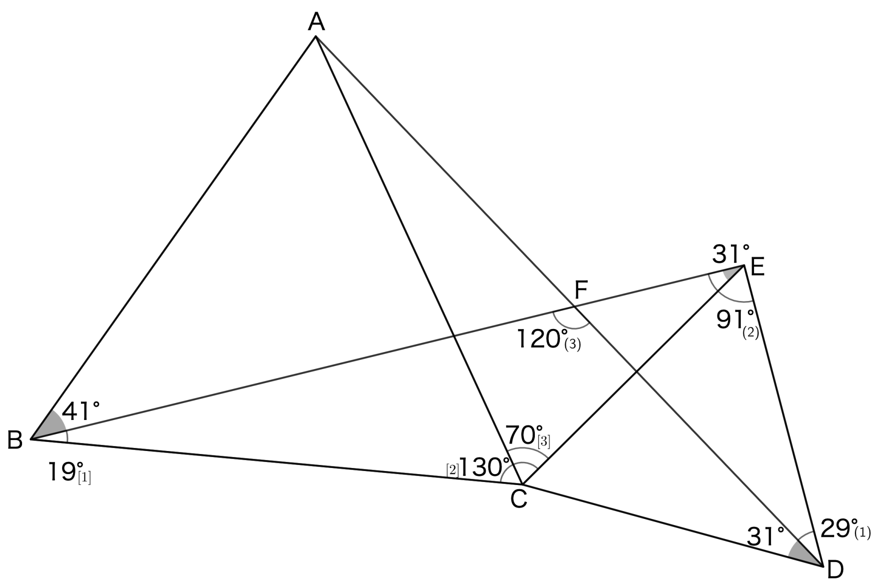
ことがわかります。今わからなくても慣れるとすぐにわかるようになります。
二組の辺が等しいことがわかれば、合同条件を揃えるために必要なのはあともう一組の辺が等しいことか、間の角が等しいことです。今回は、もう一組の辺 AD と辺 BE が等しいことは証明できなさそうなので、間の角が等しいことを証明しようと思います。
$\angle ACD$ と $\angle BCE$ が等しいことをいうためには、これらが二つの角を合わせた角であることに注目します。
すなわち、$\angle ACD = \angle ACE + \angle ECD$、$\angle BCE = \angle BCA + \angle ACE$ です。
このうち、$\angle ACE$ は共通で、残りの $\angle ECD$ と $\angle BCA$ は正三角形の角なので、$60°$ です。
したがって、どちらの角も $\angle ACE + 60°$ であり、等しいことがいえます。
あとは合同条件と結論を書いて、証明終了。

三角形の合同証明

三角形の合同条件 3 つは、必ず覚えなければいけません。しかし、丸暗記するだけではなくイメージを掴んでおくと覚えやすく、忘れにくくなります。
例えば「二組の辺とその間の角がそれぞれ等しい」であれば、頭の中で二つの辺とその間の角を固定してみましょう。すると、残りの一つの辺は二つの頂点の間を結ぶしかなく、絶対に同じ三角形しか作れません。したがって、二つの辺とその間の角が同じであれば同じ三角形であるといえるのです。



(2) 私は、次のような順序で考えました。他の考え方もあると思います。
まず、問題文中で与えられている角度を図に書き込みます。そして、$\triangle ACD \equiv \triangle BCE$ より $\triangle CEB = \triangle CDA = 31°$ もわかるので書き込みます。このように、わかった角度はどんどん図に書き込んでいきます。



$\angle ACE$

[1]$\angle FBC = 60° - 41° = 19°$

[2]$\triangle BCE$ の内角の和は $180°$ なので、$\angle BCE = 180° - 19° - 31° = 130°$

[3]$\angle ACE = 130° - 60° = 70°$

$\angle BFD$

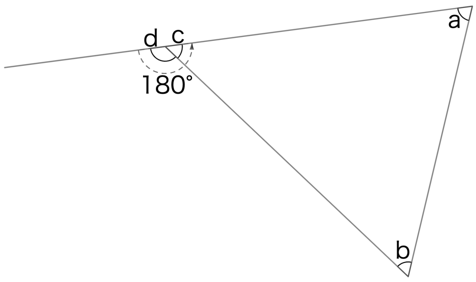
(1)$\angle EDF = 60° - 31° = 29°$

(2)$\angle FED = 60° + 31° = 91°$

(3)$\angle BFD = \angle EDF + \angle FED = 29° + 91° = 120°$

三角形の内角と外角の関係

三角形の内角と外角には、知っていると何かと便利な性質があります。
以下のようなスリッパ型の図で、$\angle a$、$\angle b$、$\angle c$ は三角形の内角、$\angle d$ は三角形の外角です。



このとき、$\angle d = \angle a + \angle b$ が成り立ちます。すなわち、三角形の外角はそこと接していない内角二つの和と等しいのです。
この性質は、比較的簡単に証明ができますので、ぜひ理解してください。
まず、三角形の内角の和は $180°$ ですので、$\angle a + \angle b = 180° - \angle c$ です。
一方で $\angle d$ と $\angle c$ を合わせると直線ですから $90°$ です。したがって、$\angle d$ も $180° - \angle c$ です。