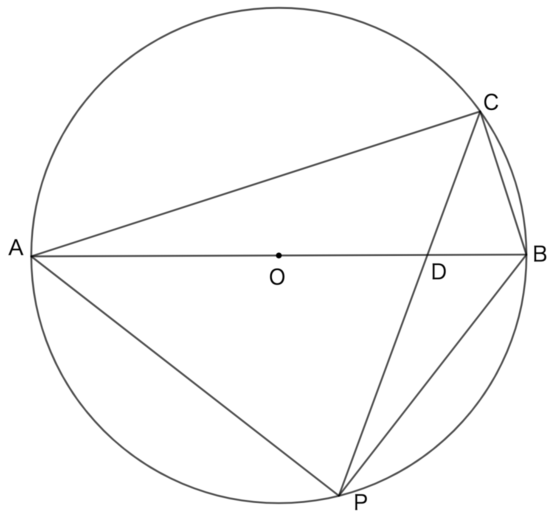
問 1

図のように線分 AB を直径とする円 O の周上に、点 A, 点 B と異なる点 C がある。また、点 C を含まない方の $\overset{\frown}{AB}$ 上に点 P がある。さらに、線分 AB と CP の交点を D とする。$AD:DB=4:1$、$CD:DP=3:5$ のとき、次の問いに答えなさい。



(1) 円 O の半径が 5cm のとき、線分 CP の長さを求めなさい。

(2) 四角形 $APBC$ の面積は $\triangle DBC$ の面積の何倍か求めなさい。

解答欄

(1)	cm	(2)	倍

TakuMath

解答

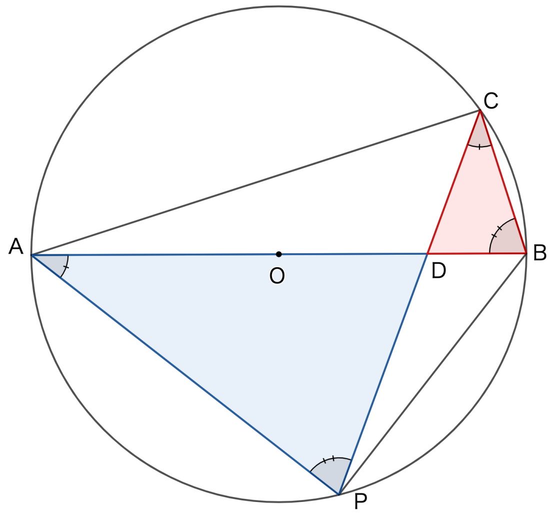
(1) $\frac{32\sqrt{15}}{15}\mathrm{cm}$

(2) $\frac{40}{3}$ 倍

解説

(1) 円周角の定理より、$\angle DAP = \angle DCB$、$\angle DPA = \angle DBC$ である。よって、二組の角がそれぞれ等しいので $\triangle DAP \sim \triangle DCB$。

相似な図形では対応する辺の比が等しいので $AD : CD = PD : BD$。



円周角の定理

円周の一部分を弧という。問題の図で、点 A と C の間の部分は弧 AC といい、$\overset{\frown}{AC}$ と表す。弧 AC 以外の部分に点 P をとるとき、$\angle APC$ を $\overset{\frown}{AC}$ **に対する円周角**という。
同じ弧に対する円周角は常に等しくなるという性質がある。問題の図において、$\angle APC$ と $\angle ABC$ はどちらも同じ $\overset{\frown}{AC}$ に対する円周角なので、$\angle APC = \angle ABC$ が成り立つ。

三角形の相似

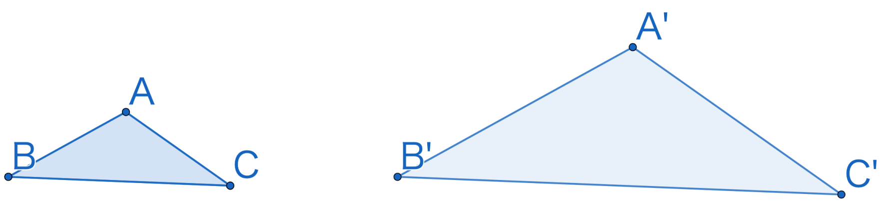
図形 A と図形 B が全く同じ形で大きさだけ違うとき、すなわち、拡大もしくは縮小した図形であるとき、A と B は**相似の関係である**という。
二つの三角形が相似であることをいうための条件は以下の三つ。

a 3 組の辺の比が全て等しい
b 2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい
c 2 組の角がそれぞれ等しい

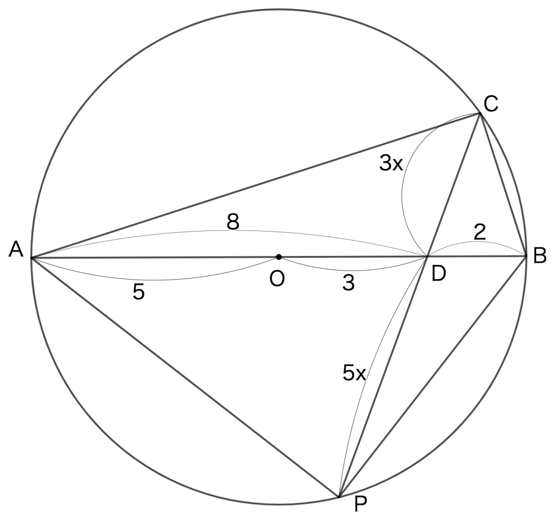
また、相似な図形では、

a 対応する角は等しい
b 対応する辺の比は等しい

という性質がある。例えば下の図で、$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ が相似のとき、$AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A'$。



ここで、問題より $AD:DB=4:1$、$AB=$ 直径 $=10$ なので $AD=8\text{cm}$、$DB=2\text{cm}$。
また、$CD:DP=3:5$ より $CD=3x$、$DP=5x$ とおける。



$$
\begin{aligned}
&AD:CD=PD:BD\\
&8:3x=5x:2\\
&3x\times 5x=8\times 2\\
&15x^2=16\\
&x^2=\frac{16}{15}\\
&x=\pm\sqrt{\frac{16}{15}}\\
&\ =\pm\frac{4}{\sqrt{15}}\\
&\ =\pm\frac{4\sqrt{15}}{15}
\end{aligned}
$$

長さを求めているので、負数は答えとして相応しくない。
$CP=CD+DP=3x+5x=8x=8\times\frac{4\sqrt{15}}{15}=\frac{32\sqrt{15}}{15}$

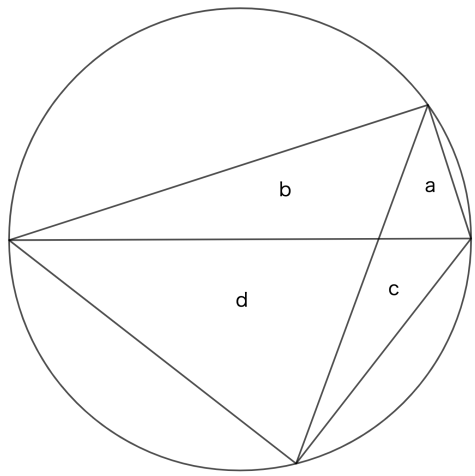
比の等式の変形

$a:b=c:d$ のとき、$bc=ad$。内側同士、外側同士をかけることがポイント。

根号を含む計算

根号 $\sqrt{}$ がついた数字は、*2* **乗するとその数になる数**のことを表す。
$\sqrt{9}$ とは、*2* **乗すると** *9* **になる数**のことなので ± 3。ただし、一般に $\sqrt{9}$ は 3 を、$-\sqrt{9}$ は-3 を表す。
足し算や引き算では、根号のついた数字は文字と同じように考えれば良い。
$\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ は違う文字なので $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ はこれ以上計算できない。
$2\sqrt{2}+5\sqrt{2}$ は $\sqrt{2}$ を文字と同じように扱って、$2\sqrt{2}+5\sqrt{2}=7\sqrt{2}$ と計算できる。
掛け算や割り算は、根号の中に入れて計算することができる。
$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times 3}=\sqrt{6}$
この考え方で、根号の中身が 2 乗の形をしているときは整数に直すことができる。
$\sqrt{3}=\sqrt{3^2}=\sqrt{3\times 3}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$
$\sqrt{3}$ は *2* **乗すると** *3* **になる数**のことなので、2 回かけたら 3 になる。

(2) 長方形などわかりやすい形ではない四角形 $APBC$ の面積は、とても扱いづらい。そこで、図のように 4 つの三角形を集めたものとして考える。ここからは、$\triangle DBC(=a)$ の面積を基準として、a 以外の三角形の面積を求めてゆく。



b

三角形の底辺の比と面積の比の関係から、$a:b=1:4$。したがって、$b=4a$。

c

a の三角形と c の三角形は相似であり、相似比は対応する線分の比より $BD:PD=2:5x=2:5\times\frac{4\sqrt{15}}{15}=2:\frac{4\sqrt{15}}{3}$。相似な図形の面積比は相似比を二乗したものであるから、

$$
\begin{aligned}
a:c &= 2^2:(\frac{4\sqrt{15}}{3})^2 \\
&= 4:\frac{4\times 4\times\sqrt{15}\times\sqrt{15}}{9} \\
&= 4:\frac{16\times 15}{9} \\
&= 4:\frac{80}{3} \\
4c &= \frac{80}{3}a \\
c &= \frac{20}{3}a
\end{aligned}
$$

d

三角形の底辺の比と面積の比の関係から、$a:d=3:5$。したがって、$d=\frac{5}{3}a$。

以上より、四角形 $APBC=a+b+c+d=a+4a+\frac{20}{3}a+\frac{5}{3}a=\frac{3a+12a+20a+5a}{3}=\frac{40}{3}a$。
これは、$\triangle DBC(=a)$ の $\frac{40}{3}$ 倍である。

三角形の面積と底辺の比の関係

高さが同じ三角形なら、底辺の長さの比が面積比と等しい。
例えば高さが 4cm で等しく、底辺が 2cm の三角形と 3cm の三角形の面積はそれぞれ 4cm^2 と 6cm^2 となり、その比は $4:6=2:3$ である。

相似な図形の面積比

相似な図形は拡大/縮小した図形であるが、「何倍に拡大/縮小したか」という倍率のことを、**相似比**という。
例えば相似な図形では対応する辺の比が全て等しいが、その辺の比が $2:3$ であった場合相似比は $2:3$ ということである。
相似な図形の**面積比は相似比の二乗**になる。例えば、相似比が $2:3$ の図形の面積比は $4:9$。