問 1

図１のように、直方体の水槽があり、その中に直方体の石が入っている。この水槽に毎分一定の水を入れる。図２は、水を入れ始めてから x 分後の水位を $y$cm としたときの x と y の関係をグラフに表したものである。水槽の高さが 30cm、底面積が 60cm^2 のとき次の問いに答えよ。

(1) 石が入っていない状態で同じ割合で水を入れたら、水槽がいっぱいになるのに何分かかるか。
(2) 石の底面積を求めなさい。

図 1

図 2

解答欄

(1)	分	(2)	cm^2

解答

(1) 20 分

(2) $40\mathrm{cm}^2$

解説

(1) 図 2 で、$x = 5$ 以降で傾きが小さくなった (=水面の上昇が遅くなった) のは、水の深さが石の高さを越えたからだと考えられる。それ以降は、今まで石があった部分にも水を入れなくてはいけなくなるので、その分水面の上昇が遅くなる。すなわち、図 2 の 5 分から 15 分の間は石がない状態での水面の上昇と同じ割合である。$15 - 5 = 10$ 分間で $30 - 15 = 15$cm 上昇しているので、1 分間だと $\frac{15}{10} = \frac{3}{2}$cm 上昇する。
石が入っていないとき、初めから毎分 $\frac{3}{2}$cm の割合で上昇するので 30cm になるには $30 \div \frac{3}{2} = 30 \times \frac{2}{3} = 20$ 分かかる。

直線の式

グラフが直線で表されるとき、式は $y = ax + b$ の形をしている。
グラフの傾きに影響を与える定数 a を**変化の割合**といい、x が 1 増えたときに y がいくら増えるかを表している。今回の問題では、1 分ごとに水位が何 cm 上昇するか。
グラフの位置に影響を与える定数 b を y **切片**といい、$x = 0$ のときの y の値を表している。
$b = 0$ とのき、グラフは原点を通る。

(2) 求めたい石の底面積を $S\text{cm}^2$ とおく。
石がある場合 15 分で満水になったのに対し、(1) で石がない場合は 20 分かかっている。石がある場合よりも満水になるまでの時間が長くかかったのは、もともと石があった空間にも水を入れなければならなくなったからである。つまり、延びた 5 分間に追加で入れた水の体積が、石の体積と等しい。
この 5 分間、水面は毎分 $\frac{3}{2}$cm ずつ増えており、水槽の底面積が 80cm^2 であることから体積にして毎分 $\frac{3}{2} \times 80 = 120\text{cm}^3$ ずつの水が水槽に入ってきている。
5 分間では、$120 \times 5 = 600\text{cm}^3$ の水を入れた。
この 600cm^3 は、もともと石があった空間に入れた水であり、石の体積と等しいので、

$$15S = 600$$
$$S = 40$$

立体の体積

今回の直方体のように何らかの平面図形を真っ直ぐ押し出したような立体を**柱**という。
例えば、下の図の左の三角形を上に押し出すと、右のような図形が出来上がる。このとき、この立体の下と上には押し出す前の三角形が見られる。この上と下の面のことをどちらも**底面**という。
柱の体積は、底面の面積 (底面積)× 高さで求めることができる。