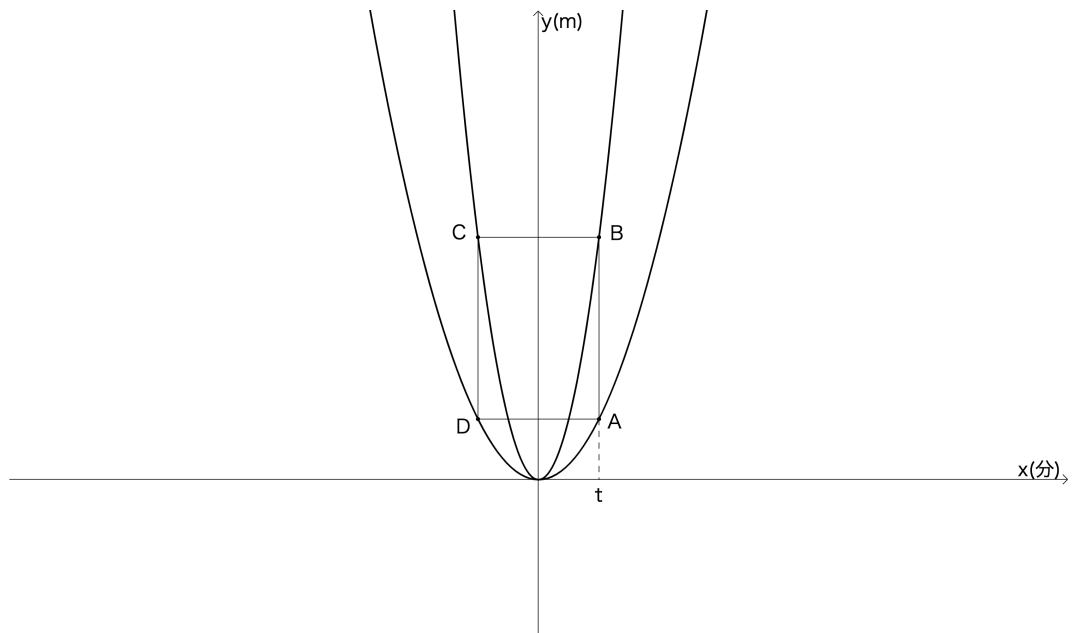


問 1

図のように、 $y = x^2$ のグラフ上に点 $B(x > 0)$ および $C(x < 0)$ 、 $y^{\frac{1}{4}}x^2$ のグラフ上に点 $A(x > 0)$ および $D(x < 0)$ がある。また、 B と C 、 A と D はそれぞれ y 座標が等しく、 A と B 、 C と D はそれぞれ x 座標が等しい。点 A の x 座標を t とおくと、次の問いに答えなさい。



- (1) $A \sim D$ それぞれの座標を、 t を用いて表しなさい。
- (2) 四角形 $ABCD$ が正方形であるとき、 t の値を求めなさい。

解答欄

(1)	A(,) B(,) C(,) D(,)			
(2)	t =			

解答

- (1) $A(t, \frac{1}{4}t^2)$
 $B(t, t^2)$
 $C(-t, t^2)$
 $D(-t, \frac{1}{4}t^2)$
- (2) $\frac{8}{3}$

解説

(1) A

そもそも点 A の x 座標を t と置き換えているので、 x 座標はそのまま t で問題ない。 x 座標が t で曲線 $y = \frac{1}{4}x^2$ 上の点なので y 座標はこの式に $x = t$ を代入して $\frac{1}{4}t^2$ 。

B

x 座標は点 A と等しいので t 。 $y = x^2$ 上の点なので $x = t$ を代入して、 y 座標は t^2 。

C

このグラフは y 軸に関して対称なので y 座標が等しい点 C は点 B のちょうど対称の位置にある。

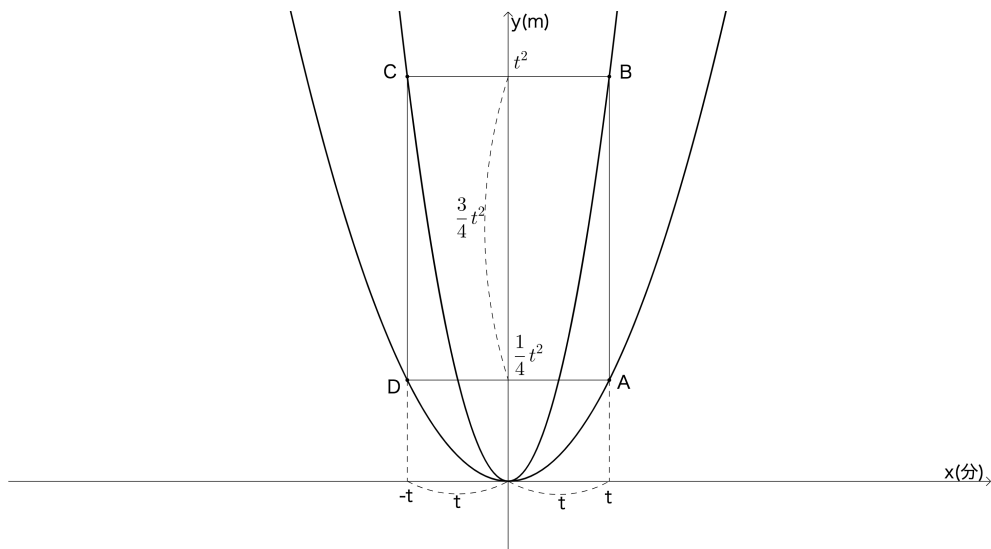
D

このグラフは y 軸に関して対称なので y 座標が等しい点 D は点 A のちょうど対称の位置にある。

(2) B と C、A と D はそれぞれ y 座標が等しく、A と B、C と D はそれぞれ x 座標が等しいことから、AB、CD は y 軸に、BC、AD は x 軸に平行である。よって四角形 ABCD は長方形である。長方形が正方形になる条件は、縦と横の長さが等しいことである。

そこで各辺の長さを t を用いて表してみると、下の図のようになる。

よって縦は $\frac{3}{4}t^2$ 、横は t が二つで $2t$ 。この縦と横の長さが等しくなっているので、そのまま



等号でつないで方程式を作り、これが成り立つような t を見つける。

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}t^2 &= 2t \\ \frac{3}{4}t^2 - 2t &= 0 \\ t^2 - \frac{8}{3}t &= 0 \\ t(t - \frac{8}{3}) &= 0 \\ t &= 0, \frac{8}{3}\end{aligned}$$

ただし、 $t = 0$ のとき、辺がつぶれてしまい正方形にはならないので問題に合わない。よって、 $t = \frac{8}{3}$ のみが正解。

二次方程式の解法

二次方程式を解くとき、一般的な解き方の一つは全ての項を一度左辺に集め、因数分解する方法。

例)

$$x^2 + 3x = -2$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$(x + 1)(x + 2) = 0$$

$$x = -1, -2$$

両辺に 2 を足した

因数分解の公式 $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

因数分解後の左辺は $(x+1)$ と $(x+2)$ をかけたものである。

掛け算では、どちらかが 0 であればもう一方が何であろうと 0 になるので、 $(x+1)$ か $(x+2)$ のどちらかが 0 であれば等式を満たす。

よって、 $x = -1$ か、 $x = -2$ 。

さらに今回の問題のように定数項 (x や t などの変数がついていない項) がない場合、安易な計算に注意する。

例えば $\frac{3}{4}t^2 = 2t$ の両辺を t で割ると、 $\frac{3}{4}t = 2$ となり、解が $t = \frac{8}{3}$ のみになってしまう。本当は $x = 0$ も解なのでそれでは間違い。

また今回のように、方程式の解として導き出された数字でも問題の答えとして相応しくない場合があるので、気をつける必要がある。