問 1

図は、ある月のカレンダーである。図の 9,10,16,17 のように、正方形で囲われた 4 つの数値の和は 4 で割り切れることを証明せよ。

	1	2	3	4	5
7	8	9	10	11	12
14	15	16	17	18	19
21	22	23	24	25	26
28	29	30	31		

解答欄

解答

(1) 四つの数値のうち二番目に小さい数を n とすると、最小の数は $n-1$、三番目に小さい数は $n+6$、最大の数は $n+7$ と表される。
この四つの数値の和は、

$$\begin{aligned}&(n-1)+n+(n+6)+(n+7)\\&=4n+12\\&=4(n+3)\end{aligned}$$

$n+3$ は整数だから、4(n+3) は 4 で割り切れる。
よって、カレンダーの正方形で囲われた四つの数値の和は 4 で割り切れる。

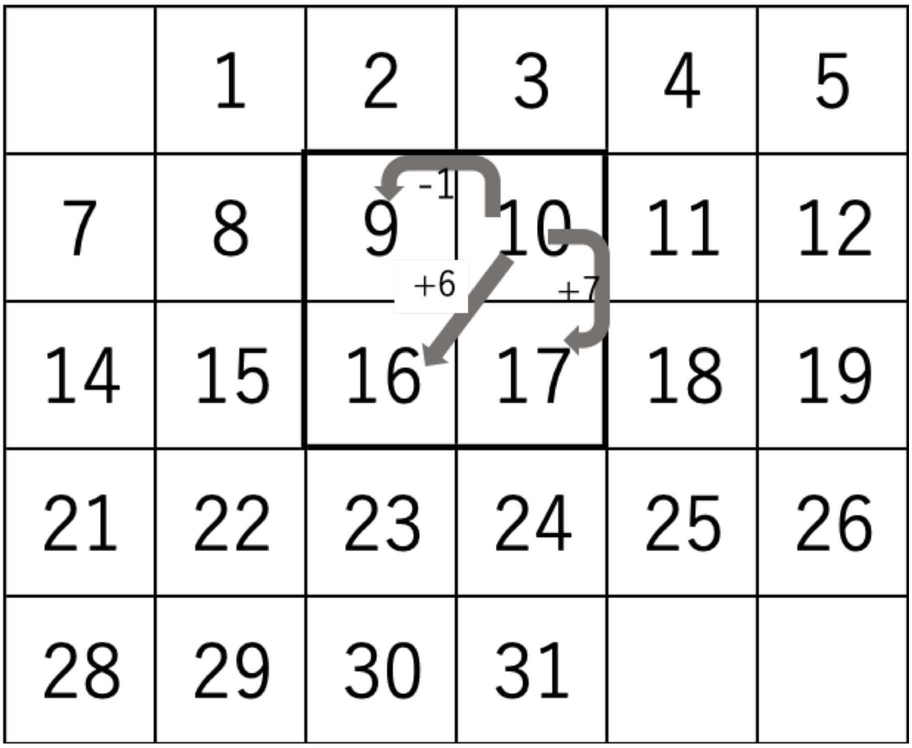
解説

問題を解く手順

i どの数字を選んでも対応できるように、4 つの数値を文字で表す
ii 4 つの数値の合計を文字で計算する
iii 結論を述べる

　例としてあげられている 9,10,16,17 について成り立つことは実際に計算をすれば簡単に確かめられるが、それでは「じゃあ 15,16,22,23 の組み合わせについても同様に成り立つのか」ときかれたら答えられない。これでは、「正方形で囲われた 4 つの数値の和は必ず 4 で割り切れる」とは言い切れない。
こういった問題では、「仮定を満たしてさえいればどの数値を選んでも結論が成り立つ」ことを証明しないといけない。
そのために数字の代わりに文字を使って証明する。

四つの数字の数値ではなく関係のみに注目すると、どの四つを選んでも必ず「一番小さい値は二番目の値から 1 を引いたもの」「三番目の値は二番目の値に 6 を足したもの」「四番目の値は二番目の値に 7 を足したもの」になる。
 ここで、二番目に小さい値を n とおく。すると、一番小さい値は $n-1$、三番目の値は $n+6$、四番



目の値は $n+7$ と表される。この数字のまま証明ができれば、数字を限定せずに「この関係性を保ってさえいればどんな値であっても結論が成り立つ」ことが言える。
あとは実際に文字のまま計算していくだけ。

$$\begin{aligned}&(n-1)+n+(n+6)+(n+7)\\&=n-1+n+n+6+n+7 &&\text{括弧を外した}\\&=4n+12\\&=4(n+3)\end{aligned}$$

ここで、変形前の式は「$(n-1)$ で一つの数字を表している」ことを強調するため、括弧をつけている。計算に影響はない。
n はカレンダーの中にある数字なので整数であり、整数に 3 を足した $(n+3)$ も整数。
よって計算結果の $4(n+3)$ は n にどんな値が入ろうとも $4\times$(整数) の形であり、これは 4 の倍数である。