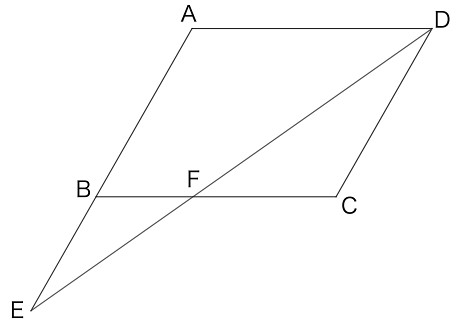
問 1

平行四辺形 ABCD の辺 AB を点 B の方向に延長し、点 E をとる。また、直線 DE と辺 BC の交点を F とする。
$AB = 4$、$AD = 5$、$BF = 2$ のとき、次の問いに答えなさい。

(1) $\triangle BEF$ と $\triangle CDF$ が相似であることを証明しなさい。
(2) $\triangle BEF$ と $\triangle CDF$ の面積比を最も簡単な整数比で表しなさい。
(3) $\triangle BEF$ と平行四辺形 ABCD の面積比を最も簡単な整数比で表しなさい。



解答欄

(1)		(2)		(3)	

解答

(1) $\triangle BEF$ と $\triangle CDF$ で、

$AE \mathbin{/\!/} DC$ であり平行線の錯角は等しいので

$\angle BEF = \angle CDF$...①

対頂角は等しいので

$\angle BFE = \angle CFD$...②

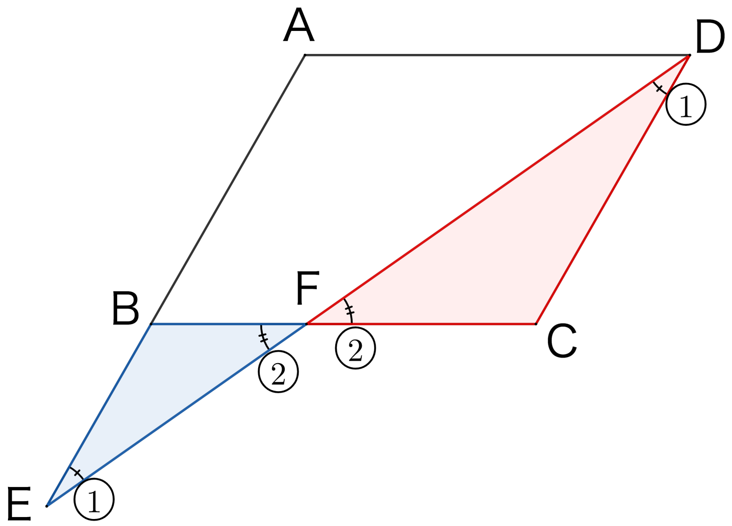
①、②より 2 組の角がそれぞれ等しいので $\triangle BEF \backsim \triangle CDF$

(2) 4:9

(3) 2:15

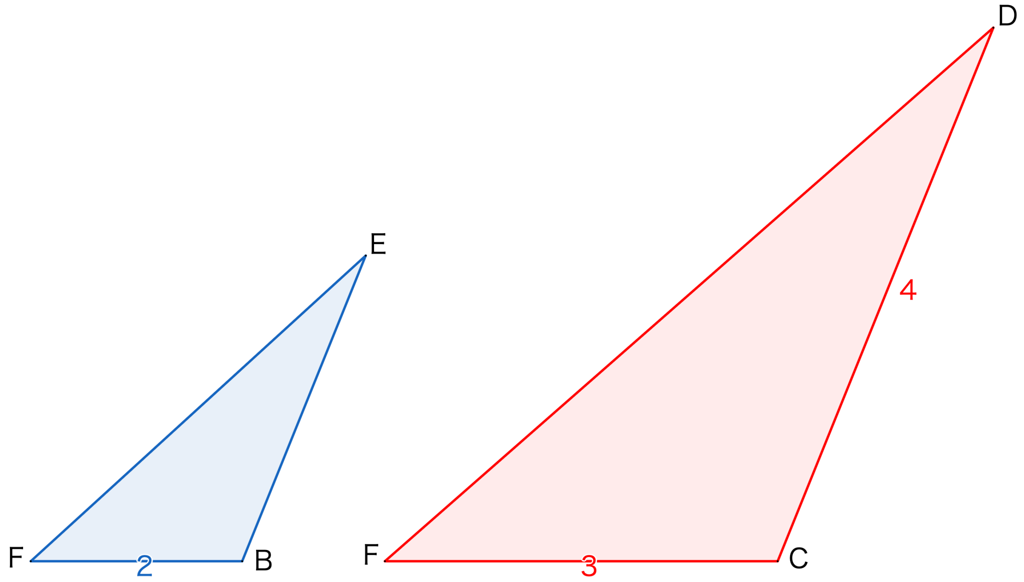
解説

(1) 平行四辺形は向かい合う辺が平行である。したがって、平行四辺形を含む図形の証明問題では平行線の性質をよく使う。
この問題では、平行線の錯角が等しいことを利用して、証明をした。



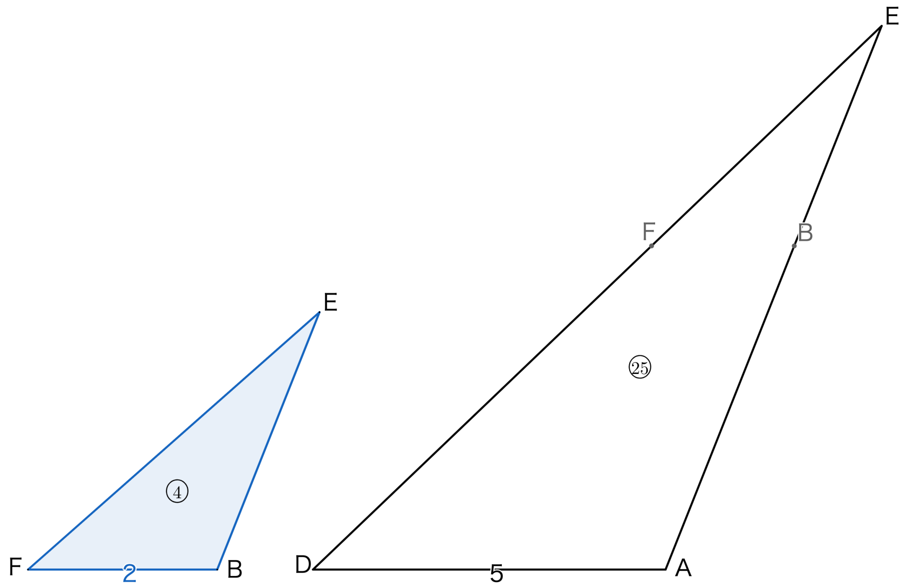
証明問題では、このように証明対象の図形や使えそうな角などを問題の図形中に書き込んでいくと整理しやすい。

(2) この 2 つの三角形は、(1) で証明した通り、相似な図形である。
向きが違ってわかりにくいので、向きを合わせて描き出しわかっている長さを書き込んでみる。
すると、相似比が 2:3 であることがよくわかる。



したがって、面積比は $2^2 : 3^2 = 4 : 9$

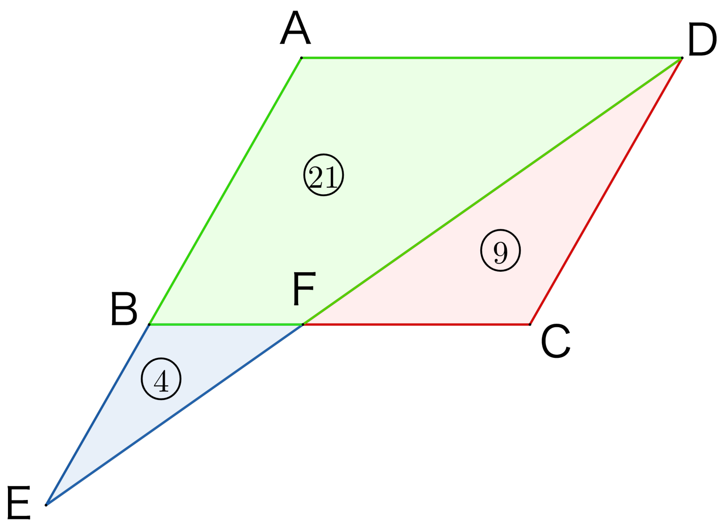
(3) 平行四辺形 ABCD は四角形 ABFD と $\triangle CDF$ を合わせたものである。
$\triangle BEF$ と $\triangle AED$ は相似であり、相似比は $2:5$ なので面積比は $2^2:5^2=4:25$。



四角形 ABFD は $\triangle AED$ から $\triangle BEF$ を除いたものなので、面積比の分布は次の図のようになる。

よって、$\triangle BEF$ の面積を S、平行四辺形 ABCD の面積を T とすると

$$
\begin{aligned}
S:T &= S:\text{四角形 } ABFD+\triangle CDF \\
&= 4:21+9 \\
&= 4:30 \\
&= 2:15
\end{aligned}
$$


A
D
21
9
B
F
C
4
E