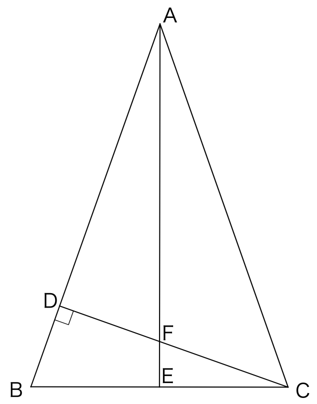
問 1

図で、$\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形である。D は辺 AB 上の点で $AB \perp DC$ であり、E は辺 BC の中点ある。また、F は線分 DC と AE との交点である。
$AB = 12$、$BC = 8$ のとき、次の問いに答えなさい。



(1) 線分 DC の長さを求めなさい。

(2) $\triangle ABC$ の面積を S とするとき、四角形 $DBEF$ の面積を S を使って表しなさい。

解答欄

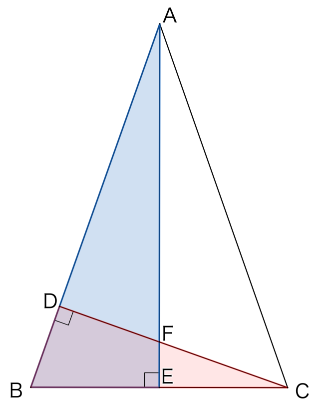
(1)		(2)	

解答

(1) $\dfrac{16}{3}\sqrt{2}$

(2) $\dfrac{23}{144}S$

解説



(1) $\triangle CBD$ と $\triangle ABE$ で、

$\angle CDB = \angle AEB = 90°$...①

$\angle CBD = \angle ABE$(共通)...②

①、② より 2 組の角がそれぞれ等しいので $\triangle CBD \backsim \triangle ABE$

$CB : AB = 8 : 12 = 2 : 3$ なので、$\triangle CBD$ と $\triangle ABE$ の相似比は $2 : 3$

また、E は BC の中点だから、$BE = \frac{1}{2}BC = 4$

よって、$DB = \dfrac{2}{3}EB = \dfrac{8}{3}$

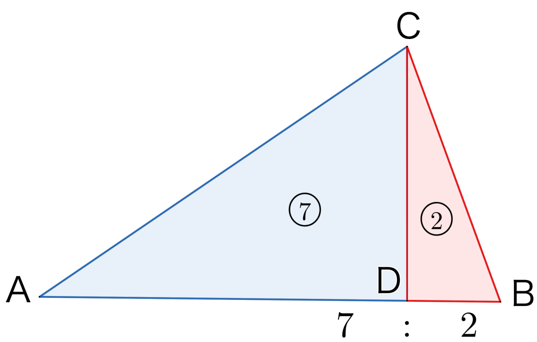
次に、$\triangle ADC$ に着目する。

三平方の定理より、

$$
\begin{aligned}
DC^2 &= AC^2 - AD^2 \\
&= 12^2 - (12 - \frac{8}{3})^2 \\
&= 12^2 - \{12^2 - 2 \times 12 \times \frac{8}{3} + (\frac{8}{3})^2\} \\
&= 2 \times 12 \times \frac{8}{3} - (\frac{8}{3})^2 \\
&= 64 - \frac{64}{9} \\
&= \frac{576 - 64}{9} = \frac{512}{9}
\end{aligned}
$$

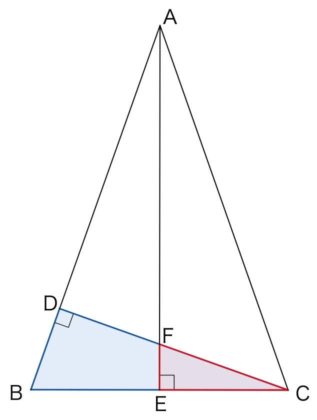
$$\therefore DC = \sqrt{\frac{512}{9}} = \frac{16}{3}\sqrt{2}$$

(2) 三角形の面積と底辺の比の関係より、

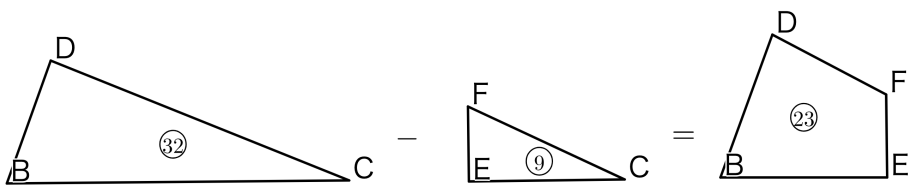


$$
\begin{aligned}
\triangle CAD : \triangle CDB &= AD : DB \\
&= \frac{28}{3} : \frac{8}{3} \\
&= 28 : 8 \\
&= 7 : 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \triangle CDB &= \triangle CAB \times \frac{2}{2+7} \\
&= \frac{2}{9}S
\end{aligned}
$$



$\triangle CEF$ と $\triangle CDB$ で、
$\angle CEF = \angle CDB = 90°$...①
$\angle FCE = \angle BCD$(共通)...②
①、② より 2 組の角がそれぞれ等しいので $\triangle CEF \backsim \triangle CDB$
$CE : CD = 4 : \frac{16}{3}\sqrt{2} = 3 : 4\sqrt{2}$ なので、$\triangle CEF$ と $\triangle CDB$ の相似比は $3 : 4\sqrt{2}$
よって $\triangle CEF : \triangle CDB = 3^2 : (4\sqrt{2})^2 = 9 : 32$
四角形 $DBEF$ は $\triangle CDB$ から $\triangle CEF$ を除いたものなので、



四角形 $DBEF : \triangle CDB = (32 - 9) : 32 = 23 : 32$
$\therefore$ 四角形 $DBEF = \triangle CDB \times \frac{23}{32} = \frac{2}{9}S \times \frac{23}{32} = \frac{23}{144}S$