

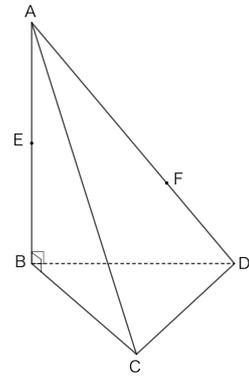
問 1

図の三角錐で、 $AB = 12\text{cm}$ 、 $BC = CD = DB = 10\text{cm}$ である。

また、点 E は辺 AB を二等分する点、点 F は辺 AD を 2 : 1 に分ける点である。

次の問いに答えなさい。

- (1) $\triangle AEF$ の面積を求めよ。
- (2) 三角錐 ABCD の体積を求めよ。
- (3) 三角錐 AECF の体積を求めよ。



解答欄

(1)	cm^2	(2)	cm^3	(3)	cm^3
-----	---------------	-----	---------------	-----	---------------

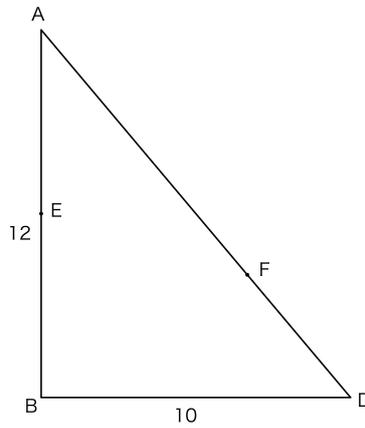
解答

- (1) 20cm^2
 (2) $100\sqrt{3}\text{cm}^3$
 (3) $\frac{100\sqrt{3}}{3}\text{cm}^2$

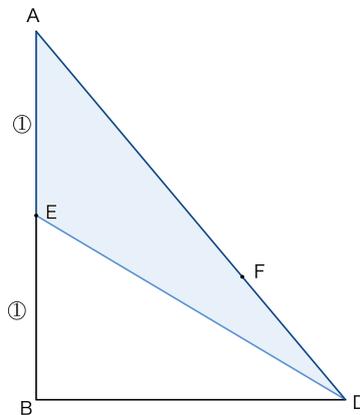
解説

(1) $\triangle ABD$ は、底辺 10cm 、高さ 12cm の三角形なので、面積は 60cm^2 。

三角形の底辺と面積の比の関係より、辺 $AE : 辺 EB = 1 : 1$ だから $\triangle DAE : \triangle DEB = 1 : 1$ 。

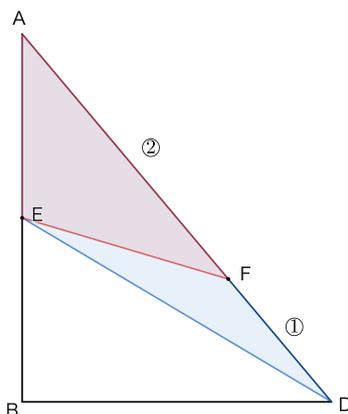


よって、 $\triangle DAE = \frac{1}{1+1} \times \triangle ABD = \frac{1}{2} \times 60 = 30\text{cm}^2$ 。



数学演習問題

さらに三角形の底辺と面積の比の関係より、辺 $AF : 辺 FD = 2 : 1$ だから $\triangle EAF : \triangle EFD = 2 : 1$ 。よって、 $\triangle EAF = \frac{2}{2+1} \times \triangle DAE = \frac{2}{3} \times 30 = 20\text{cm}^2$ 。

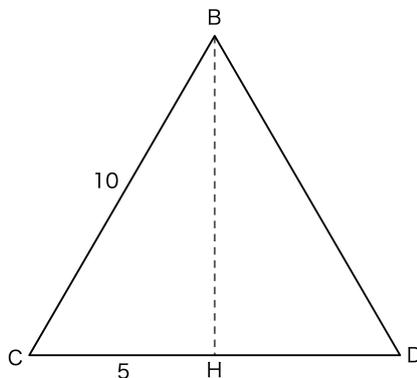


(2) 一般に錐の体積は、底面積 \times 高さ $\times \frac{1}{3}$ で求められる。

三角錐 ABCD の底面は、 $\triangle BCD$ である。

頂点 B から辺 CD へ垂線を引き、辺 CD との交点を H とする。

$\triangle BCH$ に三平方の定理を用いると、 $BH = 5\sqrt{3}$ 。



よって、 $\triangle BCD$ は底辺が 10cm 、高さ $5\sqrt{3}\text{cm}$ の三角形であるので、面積は $10 \times 5\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 25\sqrt{3}(\text{cm}^2)$ 。

よって三角錐 ABCD は底面積 $25\sqrt{3}\text{cm}^2$ 、高さ 12cm なので、その体積は $25\sqrt{3} \times 12 \times \frac{1}{3} = 100\sqrt{3}(\text{cm}^3)$ 。

(3) $\triangle ABD$ を底面として考える。

(1) より、 $\triangle ABD$ の面積は 60cm^2 、 $\triangle AEF$ の面積は 20cm^2 なので、残りの部分である四角形 EBDF の面積は $60 - 20 = 40(\text{cm}^2)$ 。よって $\triangle AEF : 四角形 EBDF = 20 : 40 = 1 : 2$ 。

数学演習問題

三角錐 $CAEF$ と四角錐 $CEBDF$ の体積の比は、底面の面積の比と等しいので、三角錐 $CAEF$: 四角錐 $CEBDF = \triangle AEF : \text{四角形 } EBDF = 1 : 2$ 。

ポイント

錐の体積は、底面積 \times 高さ $\times \frac{1}{3}$ で求められる。

例えば高さがどちらも 3 で底面積が 4 の錐と 8 の錐の体積をそれぞれ求めると、4、8 となり底面積の比が 1 : 2 で体積の比も 1 : 2 になっている。このように、底面積の比と錐の体積の比は等しくなる。

また、三角錐 $CAEF$ と四角錐 $CEBDF$ を合わせると三角錐 $CABD$ なので、(2) より体積の合計は $100\sqrt{3}\text{cm}^3$ 。

よって三角錐 $CAEF = \frac{1}{1+2} \times \text{三角錐 } CABD = \frac{1}{3} \times 100\sqrt{3}$ 。