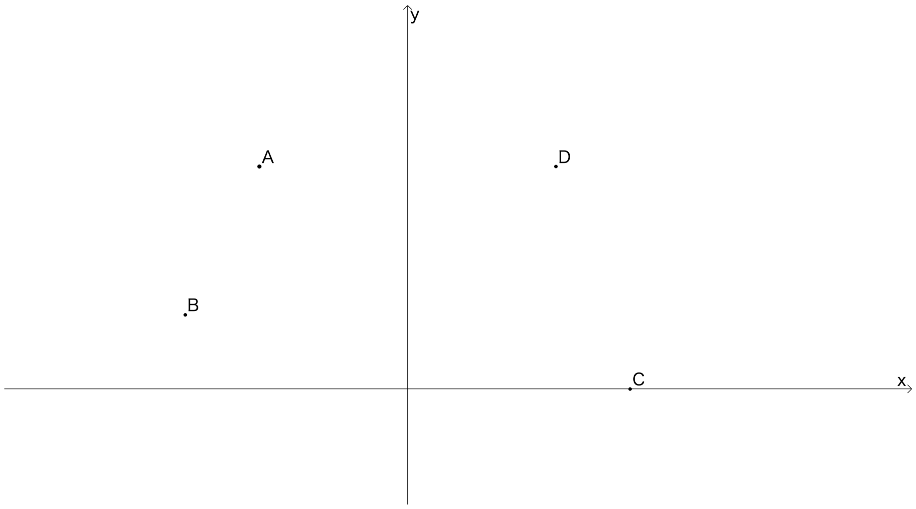
問 1

図で、点 A、B、C、D の座標はそれぞれ (-2,3)(-3,1)(3,0)(2,3) である。次の問いに答えなさい。



(1) 直線 AC の式を求めなさい。

(2) 点 D を通り、直線 AC と平行な直線の式を求めなさい。

(3) 図の $(y > 0)$ の位置に点 E をとる。四角形 ABCD と三角形 EBC の面積が等しいとき、点 E の座標を求めなさい。

解答欄

(1)		(2)		(3)	

解答

(1) $y=-\frac{3}{5}x+\frac{9}{5}$

(2) $y=-\frac{3}{5}x+\frac{21}{5}$

(3) $(-\frac{14}{13},\frac{63}{13})$

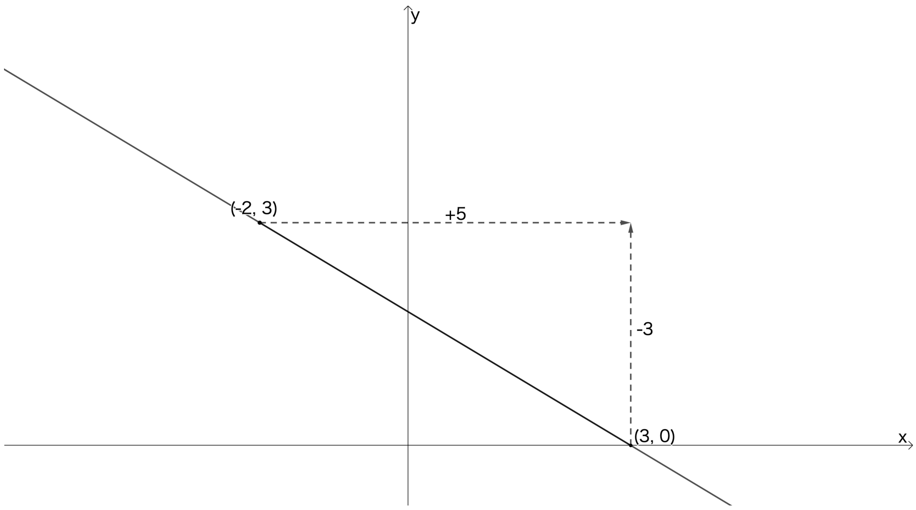
解説

(1) 傾きを a、切片を b とすると、直線の式は $y=ax+b$ と表される。

傾きは $\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ で求められる。

点 A から C まで、x は $(-2\to3)$ で 5 増加しているので x の増加量は 5、y は $(3\to0)$ で 3 減少しているので y の増加量は-3。

よって傾き $a=\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5}$。



直線の式に求めた a を代入して、$y=-\frac{3}{5}x+b$。

またこの直線は C(3,0) を通るので $x=3, y=0$ を代入して $0=-\frac{3}{5}\times3+b$。

これを解く。

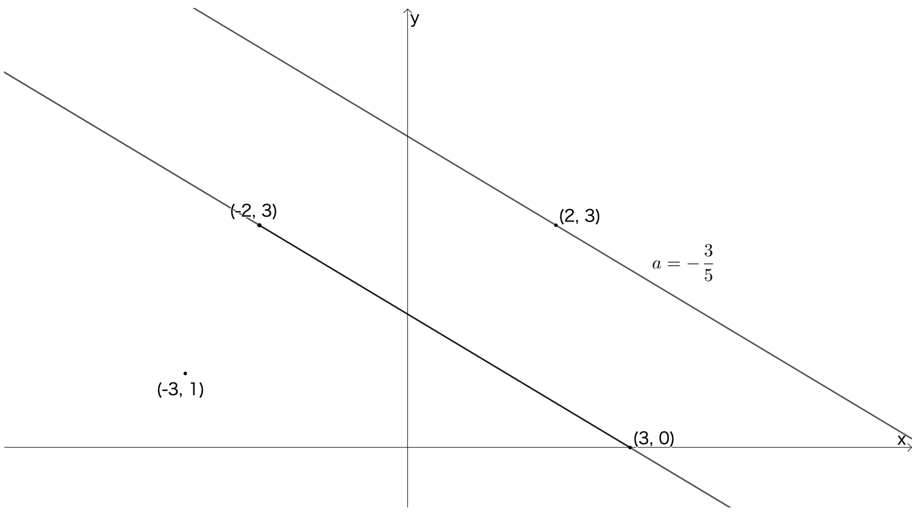
$$
\begin{aligned}
0&=-\frac{3}{5}\times3+b\\
b&=\frac{3}{5}\times3\\
&=\frac{9}{5}
\end{aligned}
$$

これを $y=-\frac{3}{5}x+b$ に代入して、求める直線の式は $y=-\frac{3}{5}x+\frac{9}{5}$

(2) 点 D を通り、直線 AC と平行な直線を l とする。

平行な直線は傾きが等しい。よって、直線 l の傾きは直線 AC と同じく $-\frac{3}{5}$ であり、式は $y=-\frac{3}{5}x+b$。

また、点 D(2,3) を通るので $x=2, y=3$ を代入して $3=-\frac{3}{5}\times 2+b$。



$$
\begin{aligned}
3 &= -\frac{3}{5}\times 2+b \\
3 &= -\frac{6}{5}+b \\
b &= 3+\frac{6}{5} \\
&= \frac{15}{5}+\frac{6}{5} \\
&= \frac{21}{5}
\end{aligned}
$$

よって、直線 l の式は $y=-\frac{3}{5}x+\frac{21}{5}$

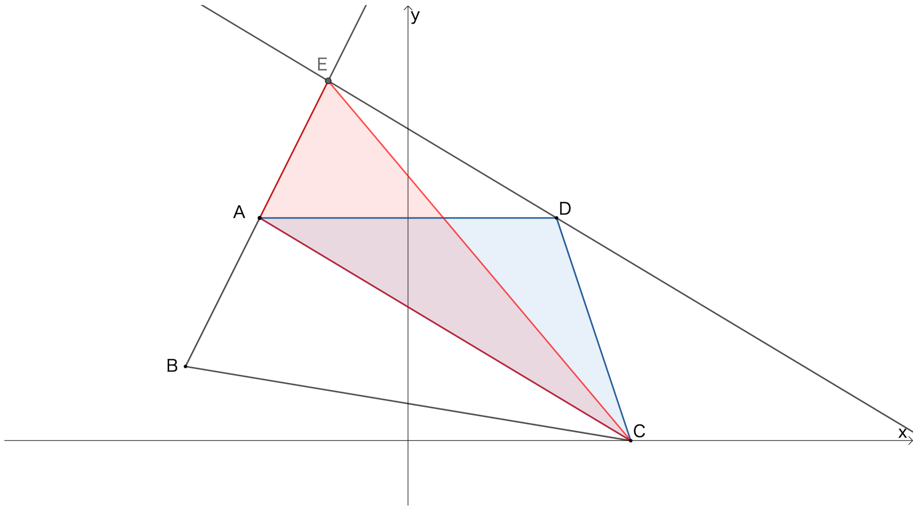
(3) 四角形 ABCD を三角形 ABC と三角形 DAC に分ける。

三角形 DAC の底辺を辺 AC とし、点 D を AC と平行に移動させると三角形の面積を変えずに変形できる (等積変形)。

図のように、三角形 ABC はそのままに三角形 DAC を等積変形すれば、それらを合わせた四角形 ABCD の面積も変わらない。

その中でも点 D を辺 BA の延長線上に持ってくれば、四角形 ABCD の頂点 A が辺 DB に含まれ、三角形になる。

このときの点 D が、求めたい点 E である。



三角形 DAC の底辺 AC に平行で点 D を含む直線の式は (2) より $y=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{21}{5}$ である。従って、点 D がこの直線上にあるかぎり三角形 DAC の面積は変わらない。
また、(1) と同じように直線 AB の式を求めると、$y=2x+7$ でありこの直線上に点 D があると四角形 ABCD が三角形になる。
よって、点 E は $y=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{21}{5}$ 上にあり $y=2x+7$ 上にある点なので、これらの直線の交点である。
交点を求めるために、二つの式を連立方程式で解く。

$$\begin{cases} y=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{21}{5} \\ y=2x+7 \end{cases}$$

代入法より、$2x+7=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{21}{5}$。これを解く。

$$\begin{aligned}
&2x+7=-\frac{3}{5}x+\frac{21}{5}\\
&2x+\frac{3}{5}x=\frac{21}{5}-7\\
&\frac{10}{5}x+\frac{3}{5}x=\frac{21}{5}-\frac{35}{5}\\
&\frac{13}{5}x=-\frac{14}{5}\\
&x=\frac{14}{13}
\end{aligned}$$

$y=2x+7$ に代入して、

$$\begin{aligned}
y&=2\times(-\frac{14}{13})+7\\
&=-\frac{28}{13}+\frac{91}{13}\\
&=\frac{63}{13}
\end{aligned}$$