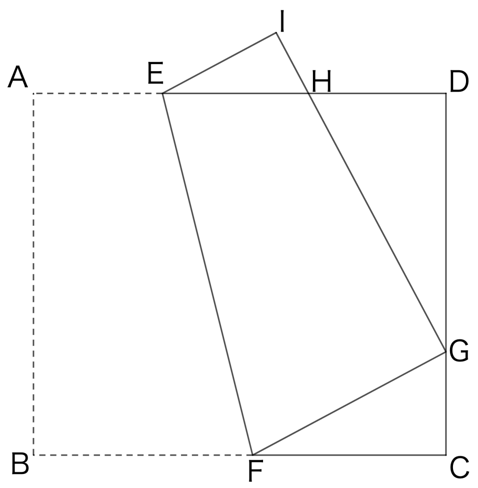
問 1

$AB=28$、$BC=32$ の長方形の紙 ABCD がある。その紙を EF を折り目として折ったところ、頂点 A が点 I と、頂点 B が点 G と重なった。また、線分 AD と線分 GI の交点を H とする。$CG=8$ のとき、四角形 EFGH の面積を求めなさい。



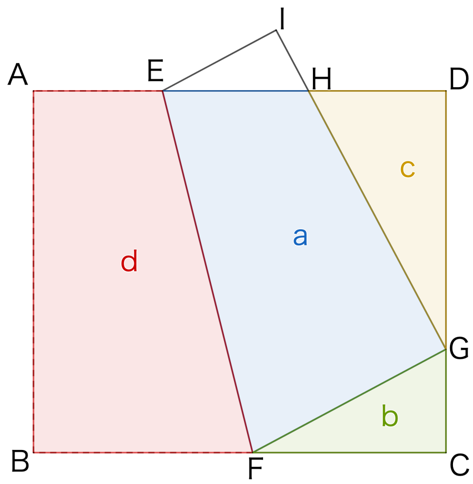
解答欄

解答

$\frac{1634}{3}$

解説

問題の図を、a〜d の部分に分ける。



求めたい面積は a なので、全体の長方形から b,c,d の面積を引けば求められる。そのため、まずは b,c,d の面積を順番に求めていく。

b

三角形の面積を求めるために底辺の長さと高さが必要である。問題より、高さは $CG = 8$ である。
底辺 $FC = x$ とおくと、$BC = 32$ より $BF = 32 - x$。
四角形 EFGI は四角形 EFBA を折り返した図形なので形は同じ。よって、$GF = BF = 32 - x$。
三平方の定理より、

$$GF^2 = FC^2 + CG^2$$
$$(32 - x)^2 = x^2 + 8^2$$
$$1024 - 64x + x^2 = x^2 + 64$$
$$64x - x^2 + x^2 = 1024 - 64$$
$$64x = 960$$
$$x = 15$$

$\therefore FC = 15$

よって、b の部分の面積は $\frac{1}{2} \times FC \times CG = \frac{1}{2} \times 15 \times 8 = 60$。

c

$\triangle FCG$ と $\triangle GDH$ で、

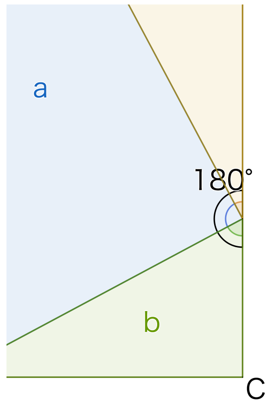
$\angle FCG = \angle GDH = 90°$...①

また、三角形の内角の和は 180° なので、

$$\begin{aligned} \angle GFC + \angle FCG + \angle CGF &= 180° \\ \angle GFC + 90° + \angle CGF &= 180° \\ \angle GFC &= 90° - \angle CGF ...② \end{aligned}$$

さらに、

$$\begin{aligned} \angle HGD + \angle IGF + \angle CGF &= 180° \\ \angle HGD + \angle ABF + \angle CGF &= 180° \\ \angle HGD + 90° + \angle CGF &= 180° \\ \angle HGD &= 90° - \angle CGF ...③ \end{aligned}$$



②、③より、$\angle GFC = \angle HGD$...④

①、④より、2 組の角がそれぞれ等しいので、$\triangle FCG \backsim \triangle GDH$。

また、相似比は $FC : GD = 15 : 20 = 3 : 4$。$(GD = 28 - 8 = 20)$

よって、$\triangle FCG$ と $\triangle GDH$ の面積比は $3^2 : 4^2 = 9 : 16$。

$\triangle GDH$ の面積は $60 \times \dfrac{16}{9} = \dfrac{320}{3}$。

d

初めに、$\triangle FCG$ と $\triangle GDH$ が相似で相似比が $3 : 4$ であることから、

$HG = \dfrac{4}{3}GF = \dfrac{4}{3}BF = \dfrac{4}{3} \times (32 - 15) = \dfrac{68}{3}$。よって、$IH = IG - HG = 28 - \dfrac{68}{3} = \dfrac{16}{3}$。

また、$DH = \dfrac{4}{3}CG = \dfrac{4}{3} \times 8 = \dfrac{32}{3}$。

台形の面積を求めるために上底・下底の長さと高さが必要である。

$\triangle GDH$ と $\triangle EIH$ で、

$\angle GDH = \angle EIH = 90°$。...①

対頂角より、

$\angle DHG = \angle IHE$...②

①、②より 2 組の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle GDH \backsim \triangle EIH$。

また、$\triangle GDH$ と $\triangle EIH$ の相似比は、$DH : IH = \dfrac{32}{3} : \dfrac{16}{3} = 2 : 1$。

よって、$EI = \dfrac{1}{2}GD = \dfrac{1}{2} \times 20 = 10$。

上底は、$AE = EI = 10$。

高さは、長方形の高さと一致するので 28。
下底は $32-15=17$。
よって d の部分の面積は $(10+17)\times 28\times\frac{1}{2}=378$。

a

$a=28\times 32-b-c-d=896-60-\frac{320}{3}-378=\frac{1634}{3}$。