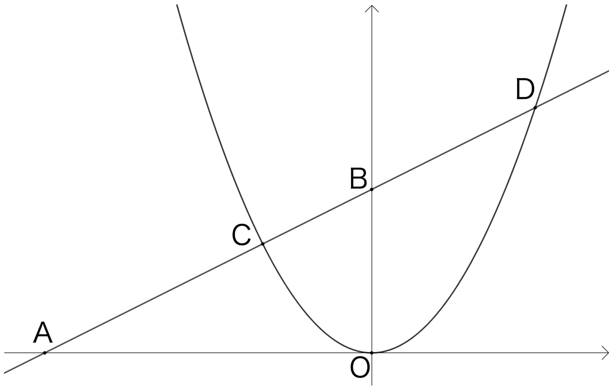
## 問 1

図のように、点 A、B、O があり、それぞれ座標は (-6,0)、(0,3)、(0,0) である。また C、D は関数 $y = ax^2$ と直線 AB との交点で、D の x 座標は 3 である。次の問いに答えなさい。




(1) a の値を求めなさい。

(2) 点 D を通り、$\triangle OCD$ の面積を二等分する直線の式を求めなさい。

(3) x 軸上 $(0 < x)$ に点 P をとる。$\triangle PCD$ の面積が $\triangle OCD$ の面積の 2 倍になるとき、P の座標を求めなさい。

解答欄

| (1) | | (2) | | (3) | |
|---|---|---|---|---|---|

## 解答

(1) $\frac{1}{2}$
(2) $y = \frac{7}{8}x + \frac{15}{8}$
(3) $(6, 0)$

## 解説

(1)

ポイント

関数 $y = ax^2$ の a を特定するには、x と y の組み合わせを 1 組知る必要がある。グラフが、点 D を通っているので、D の座標が使える。
D の座標を求めるためには D を通る直線の式が必要。
よって、この問題は次のような順序で解く。

直線の式を求める
↓
点 D の座標を求める
↓
放物線の式を求める

直線 AB は、切片が 3 より $y = \alpha x + 3$ と表される。
また、A(-6,0) を通っているのでこれを代入して、$0 = -6\alpha + 3$。
よって、$\alpha = \frac{1}{2}$。直線 AB の式は、$y = \frac{1}{2}x + 3$。

点 D は直線 AB 上の点であり、x 座標が 3 である。よって、$y = \frac{1}{2}x + 3$ に $x = 3$ を代入して、

$$y = \frac{1}{2} \times 3 + 3 = \frac{3}{2} + \frac{6}{2} = \frac{9}{2}。$$

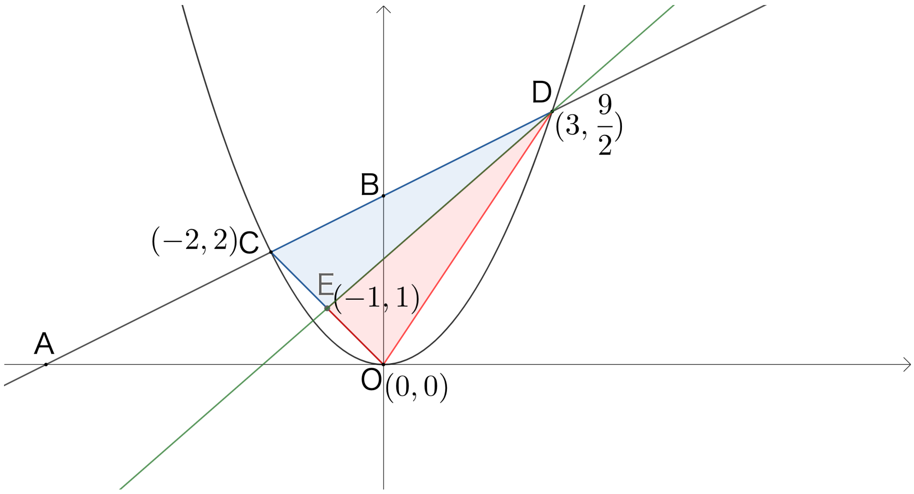
よって、点 D の座標は $(3, \frac{9}{2})$。

放物線 $y = ax^2$ が、点 $D(3, \frac{9}{2})$ を通るので、$x = 3$、$y = \frac{9}{2}$ を代入すると、$\frac{9}{2} = a \times 3^2$。
これを解いて、$a = \frac{1}{2}$。

(2) 底辺を CO、頂点を D とする。

底辺 CO 上に点 E をとる。三角形の面積比と底辺の比の関係より、$CE : EO = 1 : 1$ すなわち $CE = EO$ であれば、$\triangle DCE : \triangle DEO = 1 : 1$ となる。このときの、D と E を結んだ直線が、求める直線である。

C と O の中点の座標は、$(\frac{-2+0}{2}, \frac{2+0}{2}) = (-1, 1)$。




よって、点 E を $(-1, 1)$ にとれば良い。

求める直線 ED は、2 点 D$(-1, 1)$、E$(3, \frac{9}{2})$ を通る。

直線 ED の傾きは $\frac{\text{y の増加量}}{\text{x の増加量}} = \frac{\frac{9}{2} - 1}{3 - (-1)} = \frac{7}{8}$。よって、直線 ED の式は $y = \frac{7}{8}x + b$ とおける。

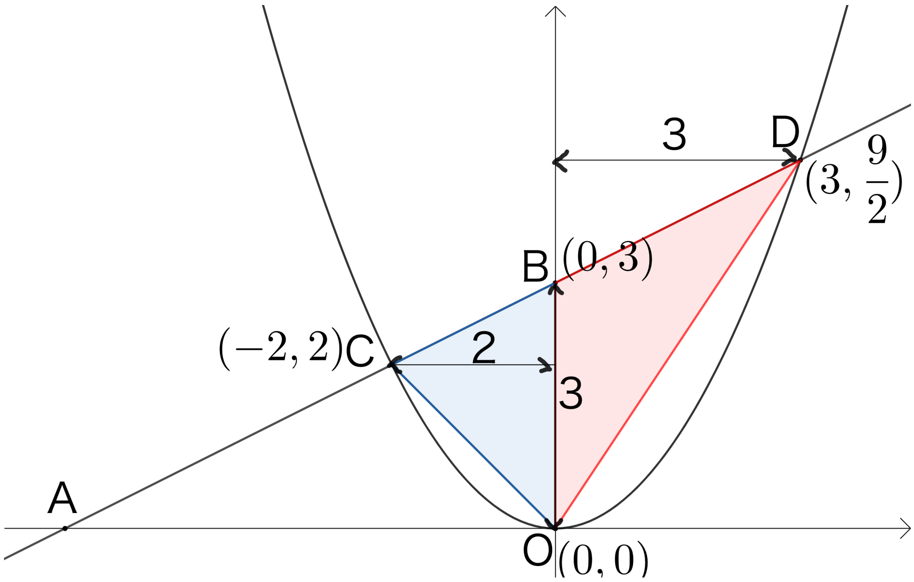
点 E(-1,1) を通るので $y = 1$、$x = -1$ を代入して、$1 = -\frac{7}{8} + b \therefore b = \frac{15}{8}$。

よって求める式は $y = \frac{7}{8}x + \frac{15}{8}$。

(3) まず、$\triangle OCD$ の面積を求める。

$\triangle OCD$ は底辺も高さもわからないのでこのままでは面積を求めることができない。

そこで、図のように底辺・高さの分かる２つの三角形に分解する。

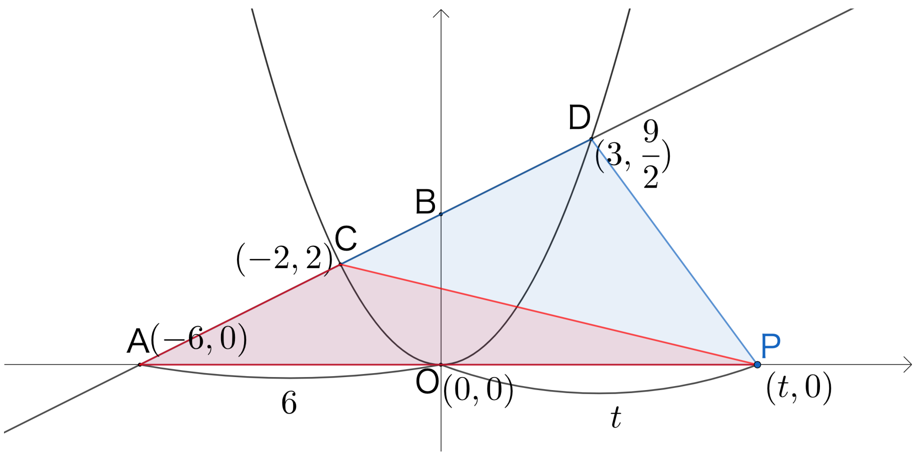



$\triangle OCD$ の面積は、２つの三角形の面積を合わせれば良いので、

$\triangle OCD = \triangle BCO + \triangle BDO = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 + \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{15}{2}$。

よって、$\triangle PCD$ の面積は 15 になれば良い。

図のように、$\triangle PCD$ は、$\triangle PDA$ から $\triangle PCA$ を引いたものである。



点Pのx座標をtとおくと、$\triangle PDA$の底辺は$t$+6、高さは$\dfrac{9}{2}$なので面積は$\dfrac{1}{2}\times(t+6)\times\dfrac{9}{2}=\dfrac{9}{4}(t+6)$。
一方、$\triangle PCA$の底辺の長さは$t+6$、高さは2なので面積は$\dfrac{1}{2}\times(t+6)\times 2=t+6$。
よって、$\triangle PCD$の面積は$\dfrac{9}{4}(t+6)-(t+6)=\dfrac{5}{4}(t+6)$。
これが15になるので、$15=\dfrac{5}{4}(t+6)$。これを解いて、$t=6$。